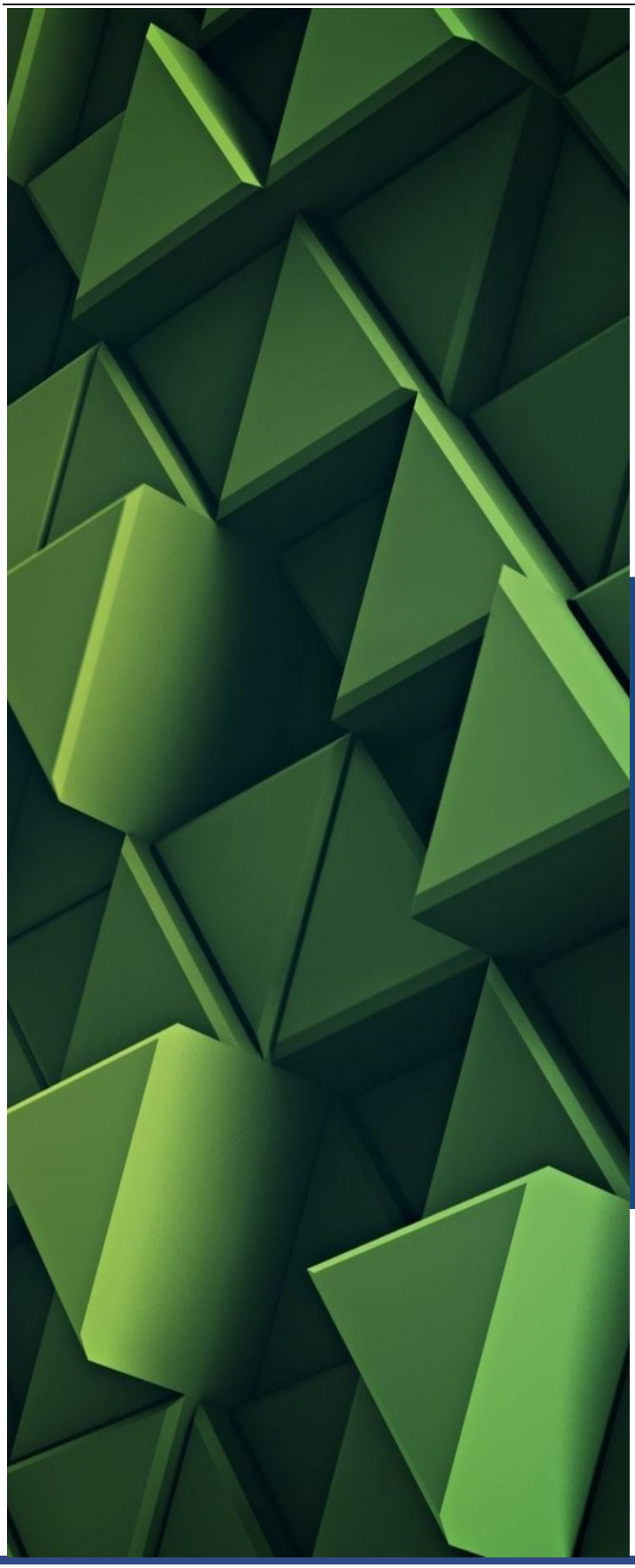
فصلنامه انجمن دانشجویی ریاضی دانشگاه هرمزگان

هندسه دلپذیر

شماره 6

فهرست

سخن سردبیر	3
نسبیت همزمانی	5
منحنی هذلولی	5
هذلولی گون دوار	7
آزمایش ذهنی قطار انیشتن	11
هندسه در خدمت تکنولوژی	12



سخن سردبیر

در این شماره از نشریه، بر آن شدیم تا پلی میان دنیای انتزاعی هندسه و واقعیت‌های ملموس فیزیک و صنعت بزنیم. از پیچیدگی‌های زمان در نسبیت اینشتین تا ظرافت‌های مهندسی در ابزارهای ساده‌ای چون جک‌های لوزی، همگی گویای یک حقیقت هستند؛ جهان ما بر پایه‌های استوار ریاضی بنا شده است. امیدواریم ورق زدن این صفحات، دریچه‌ای تازه رو به شگفتی‌های علم برای شما بگشاید.

شناسنامه نشریه

مه‌ته‌ما

شماره شش

بهار۱۴۰۵

نوع نشریه: فصلنامه

منتشرشده توسط:

انجمن علمی ریاضیات و کاربردها، دانشگاه هرمزگان

مدیرمسئول:

شیما عباد

سردبیر:

یسنا قائدی

هیئت تحریریه:

زینب حسینی‌پور

مه تا سلطانی پور

فاطمه رحیمی

محمدامین نوبخت

امیمه رئیسی

با همکاری: اسامه سروی

با نظارت: دکتر سهراب استاد هادی دهکردی

نسبیت همزمانی

نسبیت همزمانی یکی از نتایج بنیادی نظریه نسبیت خاص است و می‌گوید «همزمان بودن» یک ویژگی مطلق نیست، بلکه به وضعیت حرکت ناظر بستگی دارد. خلاصهٔ درست مفهوم چنین است

اگر در دو نقطه‌ی A و B دو چراغ قرار دهیم و کلیدی آن‌ها را طوری روشن کند که ناظری که در وسط قرار دارد (و نسبت به دو چراغ ساکن است) نور هر دو را همزمان دریافت کند، این ناظر نتیجه (AB) فاصلهٔ می‌گیرد که دو چراغ همزمان روشن شده‌اند.

اما ناظری که نسبت به این دستگاه در حال حرکت است، به دلیل تفاوت در مسیر طی‌شده نورها و ثابت بودن سرعت نور، یکی از نورها را زودتر از دیگری دریافت می‌کند و نتیجه می‌گیرد که روشن شدن یکی از چراغ‌ها زودتر رخ داده است. ناظر دیگری که در جهت مخالف حرکت می‌کند ممکن است ترتیب برعکس را مشاهده کند.

بنابراین همزمانی رویدادها به ناظر وابسته است و همزمانی مطلق وجود ندارد.

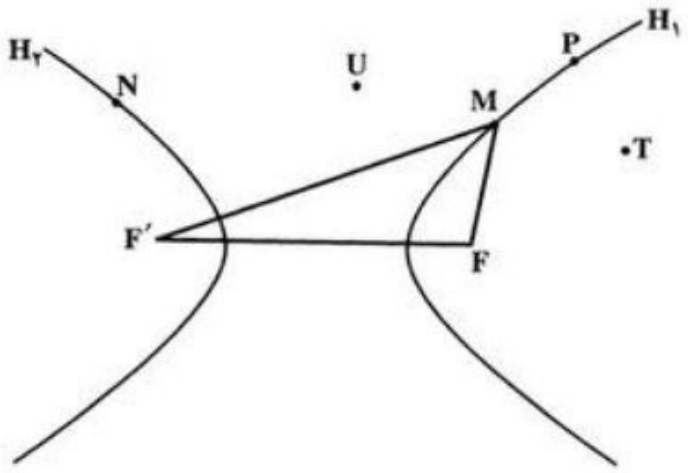
ترتیب زمانی برخی رویدادها نیز می‌تواند برای ناظران مختلف متفاوت باشد، به شرط آنکه این رویدادها نتوانند بر یکدیگر اثر علّی بگذارند. زمان در نسبیت خاص کمیتی وابسته به چارچوب مرجع است، نه یک ساعت جهانی مشترک برای همه ناظران.

منحنی هذلولی

در صفحه Pدو نقطه ثابت F و F' به نام کانون‌ها به فاصله 2c از یکدیگر و عدد ثابت 2 a(a<c) را در نظر می گیریم. مکان هندسی نقاطی چون M از صفحه به طوری که |MF'-MF|=2a باشد، شکلی است به نام هذلولی.

هذلولی دارای دو شاخه است. در شکل زیر برای هر نقطه M از شاخه H1 که در سمت راست قرار دارد چنین داریم:

$$(۱)\ \overline{MF'} - \overline{MF} = ۲a$$



همچنین برای هر نقطه N از شاخه H2 که در سمت چپ قرار دارد داریم:

$$(۲)\ \overline{MF} - \overline{MF'} = ۲a$$

بخشی از صفحه که در سمت راست شاخه H1 قرار دارد یعنی شامل کانون F است بخش fو بخشی از صفحه که در سمت چپ شاخه H1 قرار دارد یعنی شامل کانون F' است بخش f' می نامیم. اگر Tنقطه ای از بخش fباشد داریم:

$$(۳)\ \overline{TF'} - \overline{TF} > ۲a$$

اگر U نقطه‌ای از بخش F' باشد داریم :

$$(۴)\ \overline{UF'} - \overline{UF} < ۲a$$

اگر در دو نقطه F و F' دو چراغ در لحظاتی روشن شوند که نور آنها با هم به یک نقطه Mاز H1برسند به عبارت دیگر برای ناظری که در نقطه M است دو چراغ F و'F به طور همزمان روشن می‌شوند، برای هر نقطه πاز شاخه H1 روشن شدن دو چراغ F و 'Fهمزمان می باشد زیرا:

$$\overline{MF'} - \overline{MF} = \overline{PF'} - \overline{PF}$$

هر ناظر T واقع در بخش f روشن شدن چراغ F را مقدم بر روشن شدن چراغ F' می‌بیند زیرا :

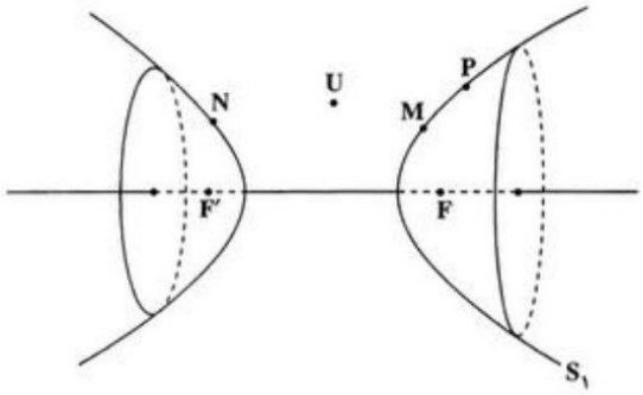
$$\overline{TF'} - \overline{TF} > ۲a$$

هر ناظر U واقع در بخش f' روشن شدن چراغ F را پس از روشن شدن چراغ F' می‌بیند زیرا :

$$\overline{UF'} - \overline{UF} < ۲a$$

هذلولیگون دوار:

اگر هذلولی را دور خط 'FF به اندازه ۳۶۰ بچرخانیم یک سطح S به نام هذلولیگون دوار حاصل می شود.



این سطح دارای دو سفره است که آنها را s1 و s2 می‌نامیم. سفره ای که برای هر نقطه Mاز آن MF'<MF است سفره s1 و سفره ای که برای هر نقطه از آن MF' > MF است سفره s2 می نامیم.

بخشی از فضا را که در یک طرف s1 است و شامل کانون F است بخش f می نامیم بخشی از فضا را که در طرف دیگر s1است بخش f' می نامیم.

اگر در دو نقطه F و 'F دو چراغ روشن شوند که نور آنها با هم به یک نقطه M از سطح s1 برسند برای هر نقطه π از سطح s1 روشن شدن دو چراغ F و'F همزمان می باشند زیرا:

$$\overline{MF'} - \overline{MF} = \overline{PF'} - \overline{PF}$$

هر ناظر T واقع در بخش f از فضا روشن شدن چراغ F را زودتر از روشن شدن چراغ 'F می بیند زیرا:

$$\overline{TF'} - \overline{TF} > ۲a$$

هر ناظر U واقع در بخش f' روشن شدن چراغ F را پس از روشن شدن چراغ F' می‌بیند زیرا:

$$UF' - UF < ۲a$$

ادراک حسی و امر واقع

در این بخش برای توضیح تعارض میان تعمیم ادراک حسی و امر واقع مثالی هندسی مطرح می‌شود. هدف نشان دادن این نکته است که ذهن انسان گاهی حکمی را که در شرایط معمول درست به نظر می‌رسد، به همه حالت‌ها تعمیم می‌دهد، در حالی که استدلال ریاضی خلاف آن را ثابت می‌کند.

فرض کنید :

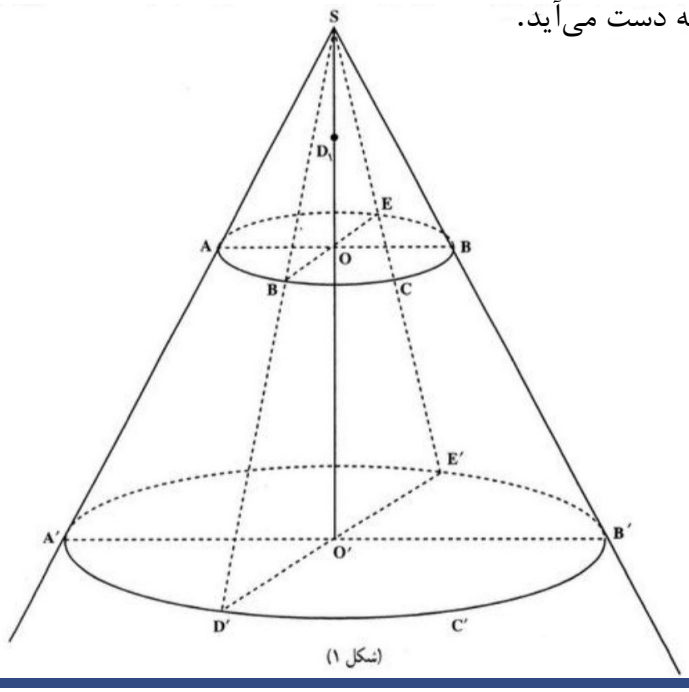
قرص C با مرکز O و شعاع r در نظر گرفته می‌شود. صفحه این قرص را P می‌نامیم.

منبع نور روی محور قرص و در فاصله‌ای از قرار می‌گیرد، به طوری که:

$SO > r$

قطر AB از قرص C در نظر گرفته می‌شود. نقاط برخورد خطهایSA ، SB و SO با صفحه موازی به ترتیب با صفحه P' O' , B' , A' می‌نامیم.

در شرایط معمول، مشاهده حسی باعث می‌شود تصور کنیم روابط اندازه‌ها و فاصله‌ها به همان صورت در همهٔ حالت‌ها برقرار است، اما بررسی هندسی نشان می‌دهد که این تعمیم همواره درست نیست و نتیجه واقعی تنها از طریق استدلال ریاضی به دست می‌آید.



(شکل ۱)

چرخش یک قرص C حول دو خط AB و تأثیر آن بر سایه‌اش روی صفحه P

- فرضیه چرخش: قرص C حول دو خط AB می‌چرخد تا زاویه‌ی چرخش به 90 درجه برسد.

در این حرکت، سایه‌ی قرص C روی صفحه P تغییر شکل می‌دهد و به ترتیب به شکل‌های بیضی‌های A'B' ، E1، E2، E3، ...درمی‌آید.

این بیضی‌ها همگی قطر بزرگ A'B' را دارند، اما E1 داخل E2 ، و E3 داخل E4 است.

- حالت روشنایی در صفحه P

الف: وقتی قرص C می‌چرخد، در صفحه P نور از خارج قرص C به سمت مرکز آن حرکت می‌کند.

ب: وقتی قرص C به اندازه 90 درجه می‌چرخد، در صفحه P ابتدا مرکز دایره C' روشن می‌شود و سپس نور از مرکز به طرف محیط قرص C می‌رود.

- شرایط وقوع پدیده‌ی عجیب:

اگر فاصله‌ی دو صفحه P و P' از حدی بیشتر شود، یا سرعت چرخش قرص C از حدی تجاوز کند، حالت ب رخ می‌دهد.

- پشتوانه‌ی هندسی:

این پدیده به یک خاصیت هندسی ساده مربوط است:

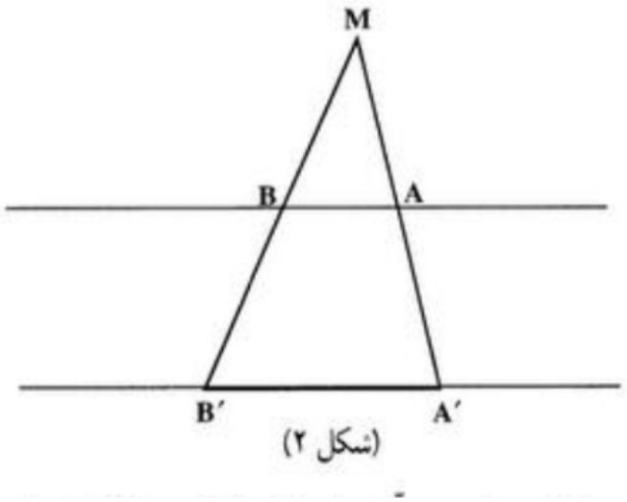
در صفحه M دو خط موازی I و I' را در نظر بگیرید. از نقطه M عمودی بر I رسم کنید و نقطه برخورد آن با I' را A' بنامید. اگر فاصله‌ی دو خط I و I' زیاد شود، طول AA' بسیار بزرگ می‌شود.

در واقع AA' - BB' بزرگ می‌شود.

- توضیح حکم ب:

در شکل ۱، DF عمود بر AB از فرض C در نظر گرفته می‌شود. نقاط برخورد خطوط SF و SD با صفحه P' را F' نشان می‌دهیم.

فاصله‌ی OO' را h می‌نامیم. با رابطه‌ی تناسب:



(شکل ۲)

$$\frac{DD'}{OO'} = \frac{SD}{SO}$$

اگر زاویه‌ی **OSD** را **α** بنامیم، داریم:

$$\frac{DD'}{\cos\alpha} = \frac{h}{\cos\alpha}$$

زمان‌بندی حرکت نور:

نور مسافت h (فاصلهDD') را در زمان h/c طی می‌کند. نور مسافت DD' را در زمان(α cos c) / h طی می‌کند. (چون DD' = h / cos α از رابطه قبلی)

شرایط چرخش و مانع بودن فرضC :

در لحظهt ، فرض C را حول AB می‌چرخانیم. نوری که در لحظه t به نقطه D' می‌رسد، نمی‌تواند به سمت قطعه O' حرکت کند، زیرا قرص C مانع است.

زمان لازم برای چرخش ۹۰ درجه:

قرص C پس از زمان π/(2ω) به وضع فاصله (زاویه ۹۰ درجه) می‌رسد(ωسرعت زاویه‌ای چرخش)

حرکت نقطه D' و زمان رسیدن نور به O' :

در لحظهt ، نقطه D' روی خط OS است، به طوریکه r = π/(2ω) (r فاصله‌ای مرتبط با حرکت است). قطعه D' به سمت نقطه O' حرکت می‌کند و در لحظه t + π/(2ω) به O' می‌رسد.

شرط زودتر رسیدن نور به O' نسبت به D':

شرایط عددی و محاسباتی

.مقادیر فرضی:

- زاویه $\alpha = ۴۴^\circ$
- پارامترمتر $r = ۱$
- سرعت دوران طوری انتخاب می‌شود که قرص C پس از ۲ ثانیه به حالت ۹۰ درجه برسد.

.محاسبه زمان‌ها:

زمان رسیدن نور به O' (از روابط قبلی) تقریباً برابر است با:

$$۱/c + h/c \times ۰.۳۹۰۱...$$

با صرف‌نظر از عبارت ۱ /c(بسیار کوچک)، شرط زودتر رسیدن نور به O' نسبت به زمان چرخش ۲ ثانیه می‌شود:

$$۲ < h/c \times ۰.۳۹۰۱...$$

.شرط فاصله:h

برای رخ دادن پدیدهٔ روشن شدن مرکز قبل از محیط، باید:

$$h > ۲c/۰.۳۹۰۱...$$

یعنی فاصلهٔ بین صفحات P و P' به اندازه‌ای زیاد باشد که نور در زمان کمتری به مرکز برسد.

$$t + \frac{\pi}{2\omega} < t + \frac{DD'}{c}$$

که ساده می‌شود به:

$$\frac{\pi}{2\omega} < \frac{DD'}{c}$$

و با جایگذاری **DD' = h / cos α**:

$$\frac{\pi}{2\omega} < \frac{h}{c\cos\alpha}$$

در پایان متن یک عبارت اضافی آمده:

$$\frac{r}{c} < \frac{h}{c\cos\alpha} - 1$$

که احتمالاً **r** همان **π/(2ω)** است و در آن یک تغییر جبری کوچک رخ داده.

آزمایش ذهنی قطار اینشتین

مفهوم نسبیت همزمانی یکی ازعجیب‌ترین و درعین حال بنیادی‌ترین نتایج نظریه نسبیت خاص آلبرت اینشتین است. به زبان ساده، این مفهوم می‌گوید که دو رویداد که برای یک ناظر «همزمان» اتفاق می‌افتند، لزوماً برای ناظر دیگری که نسبت به او در حال حرکت است، همزمان نیستند.

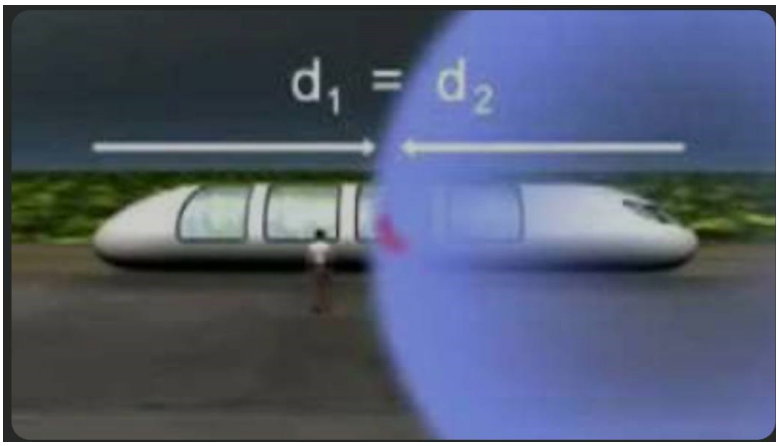
در فیزیک کلاسیک (نیوتنی)، زمان مطلق بود؛ یعنی اگر دو بمب در دو نقطه مختلف همزمان منفجر می‌شدند، همه در سراسر جهان توافق داشتند که آن‌ها در یک لحظه رخ داده‌اند. اما اینشتین ثابت کرد که زمان به حرکت ناظر بستگی دارد.

برای درک این موضوع، اینشتین یک مثال معروف دارد:

- ناظر ساکن (روی سکو): فرض کنید فردی وسط یک سکوی قطار ایستاده است. همزمان دو صاعقه به دو انتهای یک قطار در حال حرکت برخورد می‌کند(نقاط A وB). چون ناظر در فاصله مساوی از این دو نقطه قرار دارد و نور هر دو صاعقه با سرعت یکسان به او می‌رسد، او می‌گوید: «هر دو صاعقه همزمان برخورد کردند».
- ناظر متحرک (داخل قطار): حالا فردی را تصور کنید که دقیقاً در مرکز قطار نشسته و قطار با سرعت بسیار زیاد به سمت راست حرکت می‌کند.
- چون قطار به سمت صاعقه جلویی (B) حرکت می‌کند، نور آن زودتر به چشم ناظر داخل قطار می‌رسد.
- در مقابل، او در حال دور شدن از صاعقه عقبی (A) است، پس نور آن دیرتر به او می‌رسد.
- این ناظر نتیجه می‌گیرد: «صاعقه جلویی زودتر از صاعقه عقبی رخ داد».

دلیل اصلی این پدیده، ثبات سرعت نور است. بر اساس قوانین فیزیک:

- سرعت نور برای همه ناظران، صرف‌نظر از سرعت حرکتشان، همیشه یک مقدار ثابت $c \approx 3 * 10^8$ متر بر ثانیه است.
- وقتی سرعت نور نمی‌تواند تغییر کند تا با حرکت ناظر هماهنگ شود، این زمان و فضا هستند که باید تغییر کنند تا معادله برقرار بماند.

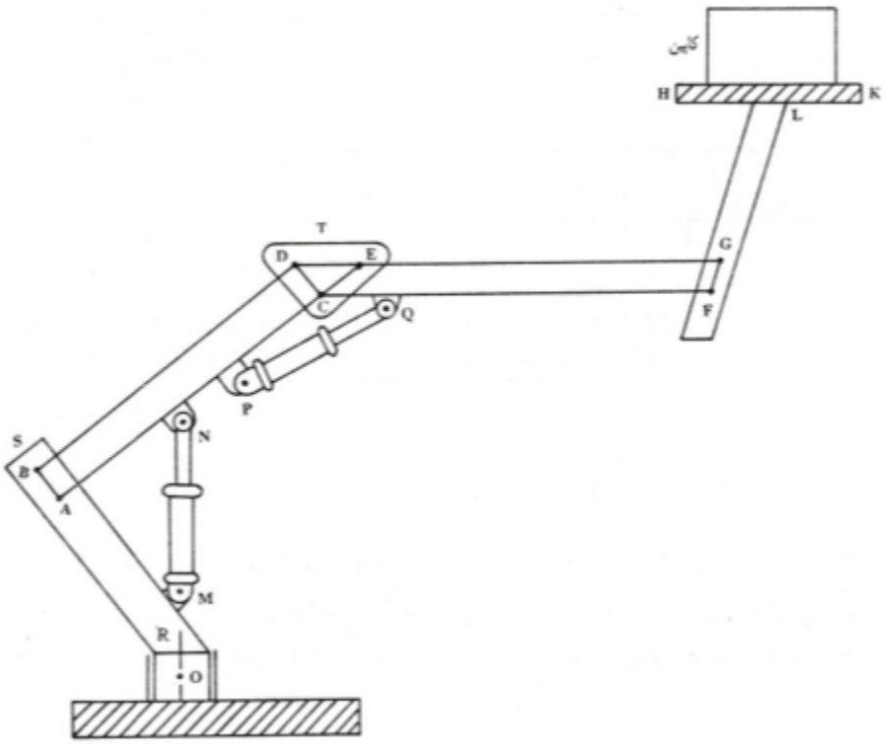


هندسه در خدمت تکنولوژی؛ واکاوی ریاضی جک‌های صنعتی و درب‌های آکوردئونی

بسیاری از مفاهیم هندسه کلاسیک، فراتر از اثبات قضایا بر روی کاغذ، شالوده اصلی مهندسی مکانیک و طراحی صنعتی را تشکیل می‌دهند. ویژگی‌های منحصربه‌فرد چهارضلعی‌های خاص مانند لوزی، مستطیل و متوازی‌الاضلاع، امکان تبدیل حرکت‌های دورانی به خطی و ایجاد سازه‌های مستحکم اما انعطاف‌پذیر را فراهم می‌کنند.

متوازی‌الاضلاع در قامت بالابرهای صنعتی

در مهندسی سازه، انتقال حرکت در راستای قائم، آن هم زمانی که پلتفرم هدف باید کاملاً افقی و بدون تراز باقی بماند، چالش بزرگی است. بالابرهای قیچی‌مانند (Scissor Lifts)که در کارخانه‌ها و کارگاه‌های ساختمانی می‌بینیم، پاسخی هوشمندانه به این چالش هستند. راز عملکرد این دستگاه‌ها در «حفظ خاصیت توازی» نهفته است؛ ویژگی نابی که از دل تعریف متوازی‌الاضلاع استخراج می‌شود.



واحد سازنده: دستگاه لولایی و تقارن مرکزی

قلب تپنده یک بالابر، واحدی هندسی به نام «دستگاه » است. این دستگاه از دو تسمه صلب با طول‌های مساوی تشکیل شده که دقیقاً از نقطه میانی (مرکز تقارن) به یکدیگر لولا شده‌اند.

طبق قضیه هندسی، در هر چهارضلعی که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند، آن چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است. در اینجا، با تغییر زاویه بین دو تسمه، رئوس چهارضلعی جابه‌جا می‌شوند اما به دلیل ثابت ماندن محل لولا در میانه‌ی تسمه‌ها، شکل حاصل در تمام لحظات یک «متوازی‌الاضلاع متغیر» باقی می‌ماند.

شبکه متوالی ؛ قضیه هم‌راستایی و تداوم حرکت

برای دست‌یابی به ارتفاع‌های زیاد، چندین دستگاه (مانند) به صورت سری روی هم سوار می‌شوند. در اینجا یک نکته ظریف ریاضی وجود دارد که پایداری بالابر را تضمین می‌کند:

- اثبات هم‌راستایی :(Collinearity) بر اساس ویژگی‌های لوزی‌های واسط که در محل اتصال دو دستگاه تشکیل می‌شوند (مانند لوزی در متن کتاب)، ثابت می‌شود که تسمه‌های متوالی همواره در یک امتداد قرار می‌گیرند.
- نتیجه مهندسی: این هم‌راستایی باعث می‌شود که کل شبکه مانند یک «اهرم یکپارچه» عمل کند. وقتی جک هیدرولیک به پایین‌ترین طبقه نیرو وارد می‌کند، این نیرو به طور هماهنگ و بدون اتلاف در طول مسیرِ مستقیمِ تسمه‌ها به بالاترین نقطه منتقل شده و باعث باز شدن یکنواخت کل سازه می‌شود.

حفظ توازی پلتفرم (قضیه اضلاع مقابل)

یکی از حیاتی‌ترین الزامات در بالابرها، افقی ماندن کفی (Platform) است.

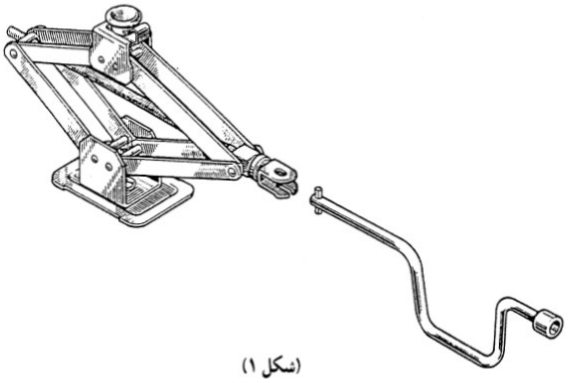
- قانون متوازی‌الاضلاع: از آنجا که پلتفرم بالایی به ضلع بالایی آخرین متوازی‌الاضلاعِ شبکه متصل است و این ضلع طبق تعریف همواره با ضلع پایه (که روی زمین ثابت است) موازی می‌ماند، پلتفرم در تمام ارتفاع‌ها، موازی با سطح زمین باقی خواهد ماند.
- درجات آزادی و هدایت: برای جلوگیری از چرخش کل سازه حول نقطه اتصال پایه، شبکه در جرزهای عمودی یا ریل‌های هدایت‌کننده مهار می‌شود. این کار باعث می‌شود تنها درجه آزادی باقی‌مانده، حرکت در راستای محور (ارتفاع) باشد.

بالابر صنعتی چیزی فراتر از چند تکه آهن لولا شده است؛ این دستگاه در واقع مجموعه‌ای از قضایای هندسی است که

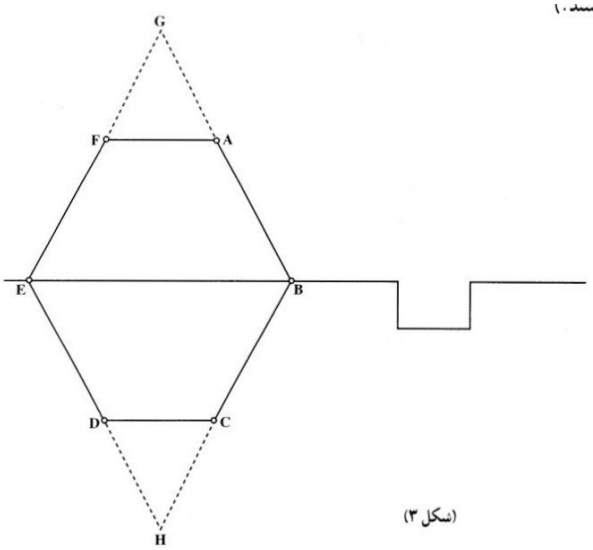
واکاوی ریاضی جک‌های لوزی

در مهندسی مکانیک، چالش اصلی جک‌های خودرو، تبدیل یک حرکت دورانی (چرخاندن دسته جک) به یک حرکت خطیِ خالص در امتداد قائم است. هرگونه انحراف جانبی در حین بالا بردن بار سنگین خودرو، می‌تواند منجر به سقوط و فاجعه شود. راه‌حل این چالش در ویژگی‌های منحصربه‌فرد «لوزی» نهفته است. در ادامه، چگونگی مهار نیرو توسط این چهارضلعی را از منظر هندسی بررسی می‌کنیم

اساس هندسی ساختمان جک لوزی



(شکل ۱)



(شکل ۳)

جک لوزی نمونه‌ای زیبا از حضور بی‌واسطه‌ی هندسه در صنعت است. ساختار آن بر پایه‌ی دو لوزی هم‌اندازه بنا شده که به‌وسیله‌ی یک محور پیچ به یکدیگر متصل‌اند. آنچه این سازه را کارآمد و ایمن می‌کند، نه صرفاً فلز و پیچ‌ومهره، بلکه چند ویژگی بنیادین هندسی است.
در نگاه نخست، ممکن است تصور شود هر لوزیِ لولایی می‌تواند چنین نقشی را ایفا کند؛ اما اگر یک لوزی تنها با چهار لولا ساخته شود، در برابر نیروهای جانبی ناپایدار خواهد بود. به همین دلیل در جک واقعی، تسمه‌ها به‌گونه‌ای آرایش یافته‌اند که یک ساختار مرکب تشکیل دهند (مانند چهارضلعی GBHE)این چینش باعث افزایش تعادل و پایداری سازه می‌شود و آن را در برابر انحراف‌های جانبی مقاوم می‌کند.

مکانیزم بالابری جک از تبدیل یک حرکت دورانی به حرکت عمودی حاصل می‌شود. محور پیچ در صفحه‌ای افقی قرار دارد و با چرخاندن دسته، دو مهره‌ی روی پیچ به هم نزدیک می‌شوند. در نتیجه قطر افقی لوزی کوتاه‌تر می‌شود و به تبع آن قطر عمودی افزایش می‌یابد. همین افزایش طول قطر عمودی است که تکیه‌گاه بالایی جک را به سمت بالا حرکت می‌دهد.
این رفتار کاملاً تابع یک رابطه‌ی ساده‌ی هندسی است. اگر طول ضلع لوزی را s و قطرها را d1 و d2 بنامیم، داریم:

$$\left(\frac{d1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d2}{2}\right)^2 = s^2$$

از آنجا که طول ضلع ثابت است، کاهش یکی از قطرها ناگزیر باعث افزایش دیگری می‌شود. بنابراین، کوتاه شدن قطر افقی مستقیماً به بلند شدن قطر عمودی می‌انجامد.

اما راز اصلی ایمنی جک در ویژگی دیگری نهفته است: در هر لوزی، قطرها بر یکدیگر عمودند. چون محور پیچ همواره موازی سطح زمین باقی می‌ماند، قطر دیگر لوزی که عمود بر آن است همواره عمود بر زمین خواهد بود. این یعنی حرکت تکیه‌گاه کاملاً قائم است و سطح بالایی جک در تمام مراحل بالا رفتن افقی باقی می‌ماند. در نتیجه، بخشی از زیر خودرو که بر این تکیه‌گاه قرار می‌گیرد، دچار لغزش نمی‌شود.

از دید مهندسی، جک لوزی نمونه‌ای از یک مکانیزم تک‌درجه آزادی است؛ یعنی با یک ورودی ساده (چرخاندن پیچ)، کل سازه به شکلی کنترل‌شده تغییر وضعیت می‌دهد. این نوع سامانه‌های مفصلی در بالابرهای قیچی‌ای، پل‌های بازشو و حتی برخی سازه‌های رباتیکی نیز به‌کار می‌روند.

جک لوزی نشان می‌دهد که چگونه یک قضیه‌ی ساده‌ی هندسی تعامد قطرهای لوزی می‌تواند ضامن ایمنی یک ابزار صنعتی باشد. آنچه روی کاغذ یک چهارضلعی ساده به نظر می‌رسد، در عمل ماشینی است که می‌تواند چند تُن وزن را با اطمینان بالا از زمین جدا کند.

منابع:

دکتر احمد شرف الدین، هندسه دلپذیر، انتشارات مدرسه، 1373

توضیحات تحلیلی توسط هیئت تحریریه نشریه با الهام از این کتاب تدوین شده است.